BZ反応におけるペースメーカーと進行波

静岡大・教養　長　島　弘　幸

Belousov-Zhabotinsky反応においてペースメーカーにより実験的に進行波の波長をコントロールすることを行っているが，今回はその定性的な理論につき述べる。

反応拡散系を次のように書く[1]。

$$\boldsymbol{A}_t = \boldsymbol{F}(\boldsymbol{A}) + \varepsilon D_M \nabla^2 \boldsymbol{A} + \varepsilon \boldsymbol{g}(\vec{x}, A) \tag{1}$$

$$0 < \varepsilon \ll 1$$

ここで$\boldsymbol{A}$は反応物の濃度を表わす。また$\boldsymbol{g}$は不純物（ペースメーカー）を表わす。

$\boldsymbol{A}$をεで展開し

$$\boldsymbol{A}(\varepsilon, t, \vec{x}) = \boldsymbol{A}_0(t, T, \vec{x}) + \varepsilon(t, T, \vec{x}) + \cdots$$

$$\boldsymbol{A}^0 = \boldsymbol{B}(t + \psi(T, \vec{x})) \tag{2}$$

とおく。ただし$T = \varepsilon t$である。

εの一次で

$$\psi_T = D(\nabla^2 \psi + \Gamma \vec{\nabla} \psi \cdot \vec{\nabla} \psi) + \alpha(\vec{x}) \tag{3}$$

を得る。ここで

$$D = <D_M B'>, \quad D\Gamma = <D_M B''>, \quad \alpha = <g>$$

で$< \ >$は一種の周期の平均である。式(3)を変形し変数分離を行うと

$$D \nabla^2 \Phi + \Gamma \alpha(\vec{x}) \Phi = \omega \Phi \tag{4}$$

を得，$\alpha > 0$の領域で正の離散固有値を得る。ここで最大固有値ω_1のみきく時空領域を考える。（実験的にはペースメーカーの比較的近くで充分時間が経過した状態）式(4)を2次元に適用し

$$\alpha(\vec{x}) = \begin{cases} \alpha & |\vec{x}| \leqq R \\ 0 & \text{その他} \end{cases}$$

として解くと固有値ωの関係式

$$\sqrt{\frac{\omega}{D}}\frac{K_1\left(\sqrt{\frac{\omega}{D}}R\right)}{K_0\left(\sqrt{\frac{\omega}{D}}R\right)} = \sqrt{\frac{\Gamma\alpha-\omega}{D}}\frac{J_1\left(\sqrt{\frac{\Gamma\alpha-\omega}{D}}R\right)}{J_0\left(\sqrt{\frac{\Gamma\alpha-\omega}{D}}R\right)} \tag{5}$$

を得る。ここでJ_0，J_1はBessel関数，K_0，K_1は変形Bessel関数である。

最大固有値ω_1のRの依存性は$0<z\ll 1$のとき

$$K_0(z) \sim \log\frac{1}{z} \qquad K_1 \sim z$$

$$J_0(z) \sim 1, \qquad J_1(z) \sim 0$$

より

$$\omega_1(R) \longrightarrow 0 \quad (R \to 0)$$

他方

$$\sqrt{\frac{\Gamma\alpha-\omega_1}{D}}R = x_0 < \alpha_1, \qquad J_0(\alpha_1) = 0$$

であるので$R\to\infty$で$\omega_1 = \Gamma\alpha$となる。これを波長λとRの関係になおすと

$$\lim_{R\to 0}\lambda(R) = \infty \qquad \lim_{R\to\infty}\lambda(R) = \lambda(\infty) = \text{一定}$$

となり，またRに関してλは単調減少となり，これは実験結果を定性的に説明する。

1) P. S. Hagan : Adv. App. Math. **2** (1981) 400.